

我是8位的

I am 8 bits, what about you?

随笔 - 205, 文章 - 0, 评论 - 103, 阅读 - 101万

导航

博客园

首页

新随笔

联系

订阅 

管理

<

2022年3月

>

日	一	二	三	四	五	六
27	28	1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31	1	2
3	4	5	6	7	8	9

公告

你的支持是我的动力

欢迎关注微信公众号“我是8位的”



昵称：我是8位的

园龄：4年7个月

粉丝：288

关注：5

+加关注

盖楼抽奖

#她的梦想在发光#

HWD科技女性故事有奖征集

分享最打动人科技女性故事

活动时间：2022年3月8日-3月18日

马上参与



搜索

找找看

谷歌搜索

常用链接

我的随笔

我的评论

我的参与

最新评论

我的标签

积分与排名

积分 - 457097

排名 - 1198

单变量微积分笔记7——曲线构图

曲线构图的目标是根据 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 画出原函数 $f(x)$ 的图像。

原函数： $f(x) = 3x - x^3$

$f'(x) = 3 - 3x^2$

$f''(x) = -6x$

函数的凹凸性

前提是：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数。

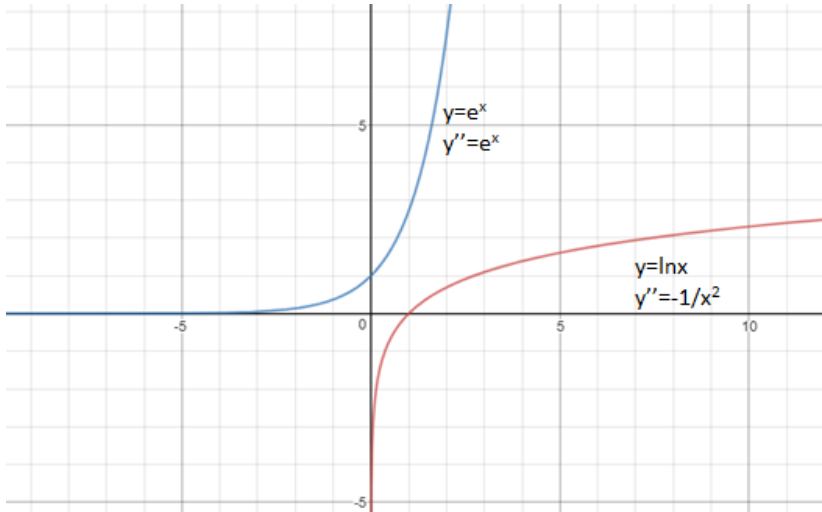
如果函数 $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是递增的；如果 $f'(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内是递减的。这很好理解， $f'(x)$ 是 $f(x)$ 在 x 点切线的斜率，只有函数递增时，切线的斜率才能大于0。

如果 $f''(x) > 0$ ，则 f' 递增；如果 $f''(x) < 0$ ，则 f' 递减。这相当于上一条结论的扩展，因为 f'' 是 f' 的导函数。

凹凸性：

(1) 若在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凹的， f' 递减，即 f 的切线斜率递减；

(2) 若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凸的， f' 递增，即 f 的切线斜率递增。



上图中 $y=e^x$ 的二阶导数 $y''=e^x > 0$ ， $y=e^x$ 是凸的； $y=\ln x$ 的二阶导数 $y'=-1/x^2 < 0$ ， $y=\ln x$ 是凹的。

奇怪的是，国内外的教材对凸凹的定义是不一样的。同济大学的教材中， f'' 大于0，函数为凹， f'' 小于0，函数为凸，跟上面的定义正好相反。在一些微积分教材中，有将凸称为上凸，凹成为下凸；还有反着叫的.....越来越乱了。

随笔分类 (211)

- ★★资源下载★★(1)
- Java并发编程(1)
- 程序员的数学(24)
- 单变量微积分(31)
- 多变量微积分(24)
- 概率(24)
- 机器学习(27)
- 软件设计(1)
- 数据分析(6)
- 数据结构与算法(27)
- 随笔(5)
- 线性代数(34)
- 项目管理(2)
- 转载(4)

随笔档案 (205)

- 2021年2月(1)
- 2020年3月(2)
- 2020年2月(6)
- 2020年1月(4)
- 2019年12月(7)
- 2019年11月(15)
- 2019年9月(3)
- 2019年8月(6)
- 2019年7月(1)
- 2019年6月(8)
- 2019年5月(3)
- 2019年4月(5)
- 2019年3月(7)
- 2019年2月(3)
- 2019年1月(7)
- 更多

阅读排行榜

- 1. 使用Apriori进行关联分析 (一) (29768)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (28772)
- 3. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(24430)
- 4. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(23099)
- 5. 多变量微积分笔记3——二元函数的极值(22772)

评论排行榜

- 1. 隐马尔可夫模型 (一) (8)
- 2. 线性代数笔记12——列空间和零空间 (7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (7)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(5)
- 5. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(4)

推荐排行榜

- 1. 寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程(7)
- 2. FP-growth算法发现频繁项集 (一)——构建FP树(7)
- 3. 线性代数笔记3——向量2 (点积) (6)
- 4. FP-growth算法发现频繁项集 (二)——发现频繁项集(5)
- 5. 隐马尔可夫模型 (一) (5)

最新评论

- 1. Re:线性代数笔记3——向量2 (点积)
如果点积小于0, 即夹角小于90°, 这个写错了吧。应该是夹角大于90°
--猫猫猫猫大人

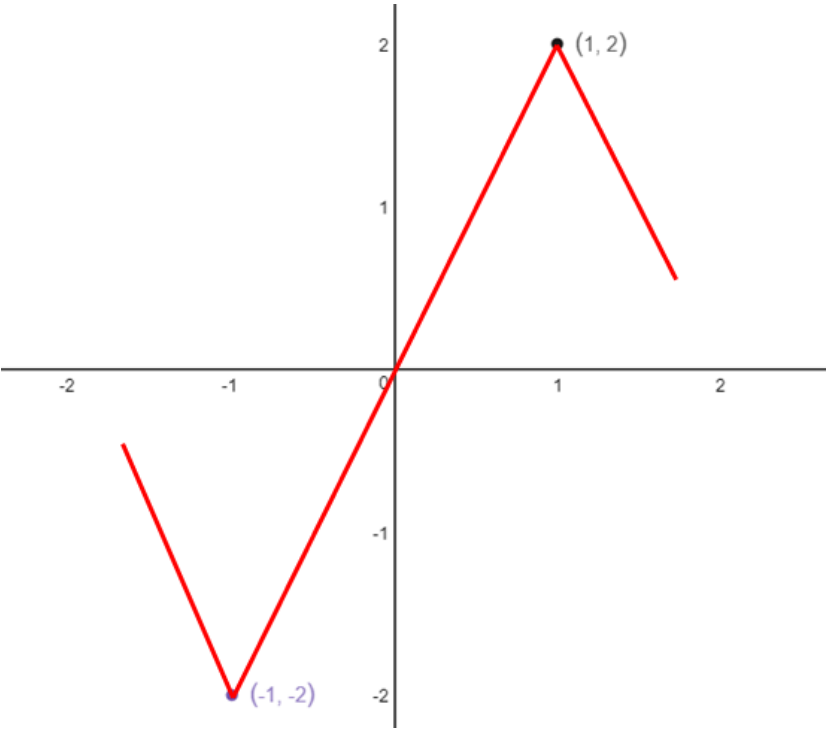
极值点和驻点

原函数 $f(x) = 3x - x^3$

$f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$

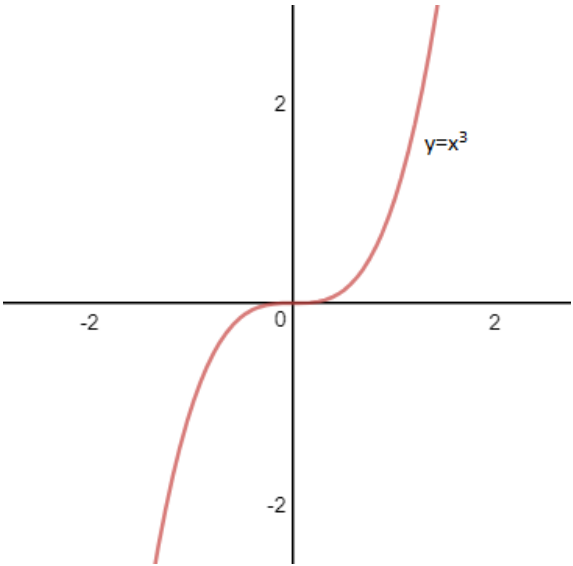
$$\begin{cases} f'(x) > 0, & -1 < x < 1, & f(x) \text{ 递增} \\ f'(x) < 0, & x < -1 \text{ 或 } x > 1, & f(x) \text{ 递减} \end{cases}$$

由此可以画出 $f(x)$ 的简图:



$(-1, -2)$ 和 $(1, 2)$ 是两个重要的点, 经过这两个点后, f' 的符号改变, f 的递增递减发生变化, 在这两个点上, $f'(x) = 0$, 这两个点称为函数的**极值点**。需要注意的是, 极值点不是最值点, 仅仅决定了导数的符号改变。

当 $f'(x_0) = 0$ 时, 称 x_0 为**驻点**, $f(x_0)$ 为**驻点值**。原函数 $f(x) = 3x - x^3$ 有 ± 1 两个驻点, 对应的驻点值为 ± 2 。显然, 极值点一定是驻点, 但驻点不一定是极值点, 因为驻点两侧的导数符号可能相同。如下图所示, $y = x^3$ 的驻点 $x_0 = 0$, 驻点两侧的导数符号相同, 函数的增减性未发生变化:



2. Re:线性代数笔记10——矩阵的LU分解写的很好，不过LU分解的前提是错的，LU分解只需要第三个条件，如果允许行置换就是下面写到的PLU，可以分解所有矩阵

--wiki3D

3. Re:单变量微积分笔记20——三角替换1 (sin和cos)很nice

--尹保棕

4. Re:线性代数笔记24——微分方程和exp(At)有些图片挂了呢

--ccchendada

5. Re:寻找“最好” (2) ——欧拉-拉格朗日方程

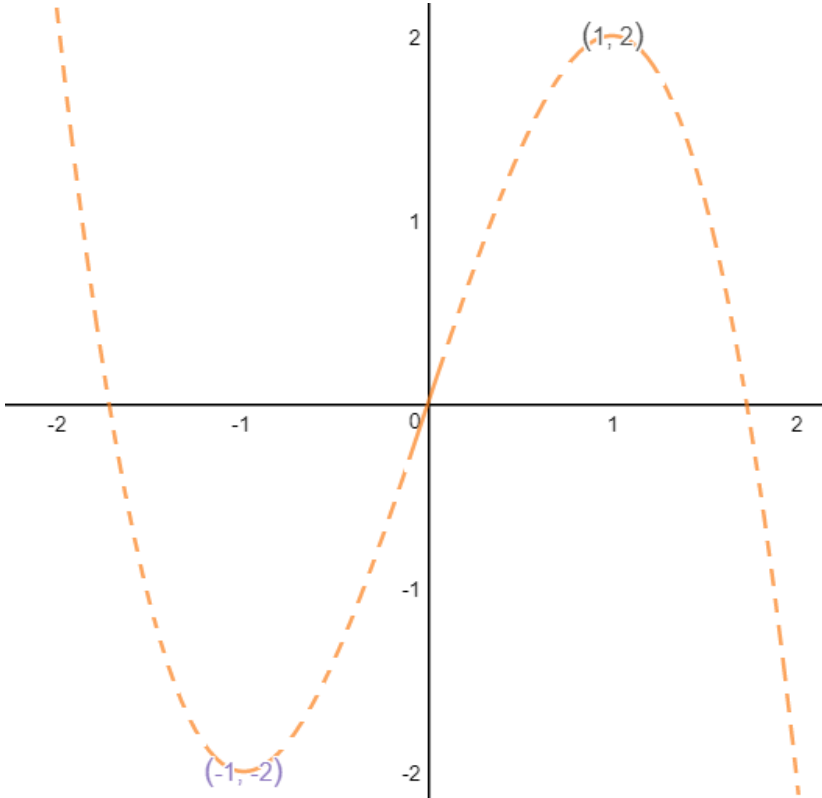
提个issue，最速降线中
\$ v = \{2gh\}^{1/2}\$ 与配图不一致，建议以起点为原点，向右伸出x轴，向下伸出y轴建立坐标系

--trustInU

拐点

此时，我们已经得到原函数 $f(x)=3x-x^3$ 的两个极值点(1,2)(-1,-2)，再将 $x=0$ 代入，得到第三个点(0,0)。

由于极值点确定了函数增减的改变，又知道 $f(x)=3x-x^3$ 是一个曲线，所以经过极值点的一定是一段弧线， $f(x)$ 的简图：



$$f''(x) = -6x, \begin{cases} f''(x) < 0, & x > 0, & f'(x) \text{ 递减, } f(x) \text{ 是凹的} \\ f''(x) > 0, & x < 0, & f'(x) \text{ 递增, } f(x) \text{ 是凸的} \end{cases}$$

由此可知 $f''(x_0)=0$ 是原曲线的凹凸分界点，称 x_0 为 $f(x)$ 的拐点。

有了拐点信息后就可以知道曲线凹凸性，即切线的变化率。

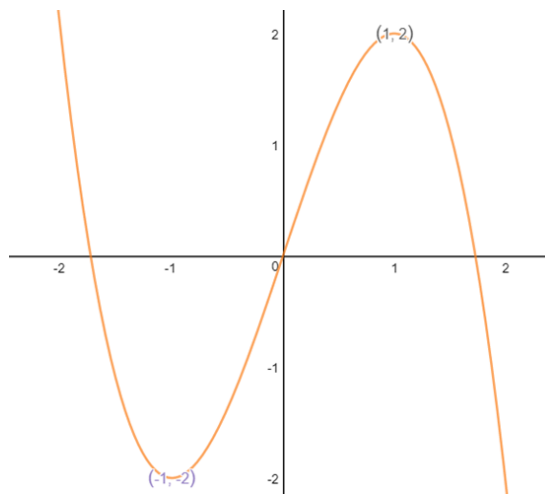
无限远端

还有一点无法在有限的二维平面内展现，就是曲线的无限远端，但这并不妨碍我们对其探索。

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - x^3) = -\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - x^3) = +\infty$$

由此可知曲线的两端向 $\pm\infty$ 方向无限延伸。

可以根据上述信息构图：



双曲线构图

下面是如何对双曲线 $f(x) = (x+1)/(x+2)$ 构图。

双曲线函数有点特性了，在 $x=-2$ 处没有定义，所以该函数是在 $x=-2$ 处断开的。可以得到下面四个极限：

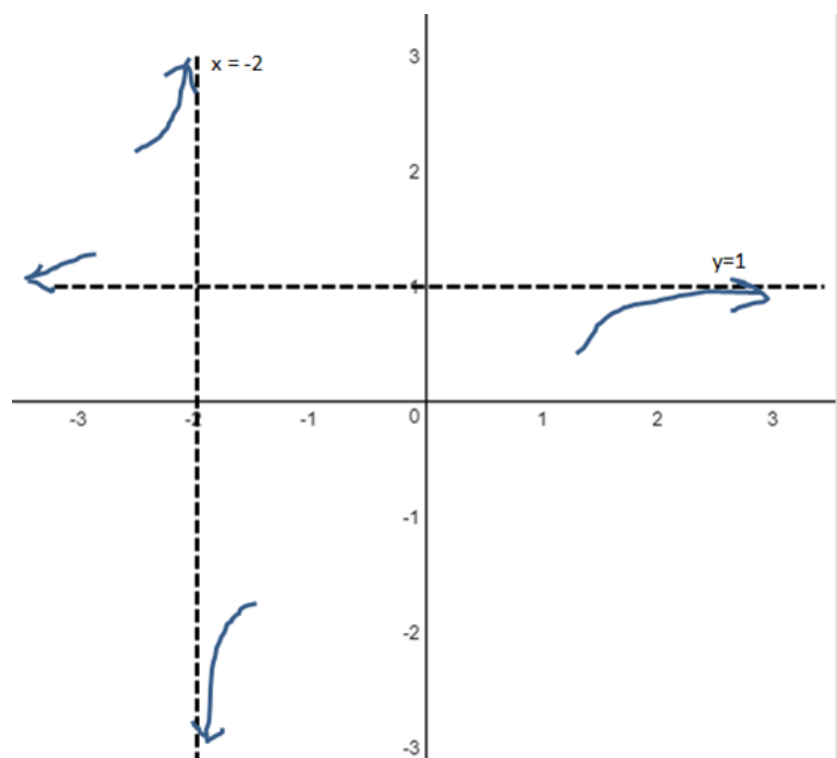
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+2} \right) = 1$$

根据上面的极限可确定曲线的四个端点，它们都是无限远端，可以画出如下草图：



有点丑陋了，这不是我画的最漂亮的图。

接下来补充中间缺失的部分，如何确定中间是平滑的？会不会出现波形？这些信息需要由驻点确定。

$$f'(x) = 1/(x+2)^2, x \neq -2$$

由于 $f'(x) > 0$ ，所有 $f(x)$ 在 -2 的两侧都是递增的；由于 $f'(x) \neq 0$ ，所以 $f'(x)$ 没有驻点，函数在 -2 的两侧的增减性不会发生改变。

$$f''(x) = -2/(x+2)^3, x \neq -2$$

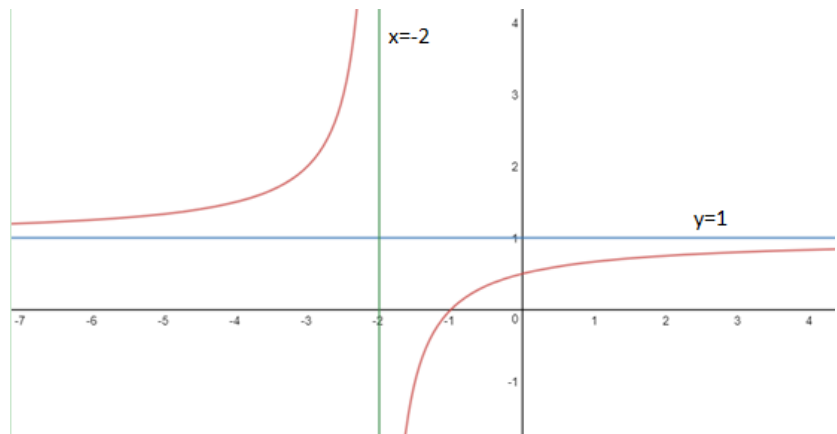
$$f''(x) > 0, -\infty < x < -2, \text{函数是凸的}$$

$$f''(x) < 0, -2 < x < +\infty, \text{函数是凹的}$$

$$f''(x) \neq 0, \text{函数没有拐点}$$

二阶导数确定了曲线的弧度方向。

至此可以构图：



构图的一般步骤

构图的一般步骤：

1. 描点，找出函数中奇点，即函数未定义的点
2. 标出无限远端
3. 标出驻点，即 $f'(x) = 0$ 的点；判断 $f'(x)$ 在每个驻点或不连续点为端点的区间内的符号，由此判断函数的递增和递减性
4. 观察二阶导数 $f''(x)$ 的正负性，以便判断 $f(x)$ 的凹凸， $f''(x) = 0$ 是拐点
5. 组合1~4构图

示例

$$f(x) = x/\ln x$$

按照上节的步骤构图。

1. 找出奇点

当 $x=1$ 是， $\ln x=0$ ， $f(x)$ 无意义，奇点是 $x=1$ ；由于使用了对数 $\ln x$ ，隐含的条件是 $x > 0$ ，所以可以得到下面两个极限：

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = \frac{1}{\ln 1^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = \frac{1}{\ln 1^+} = +\infty$$

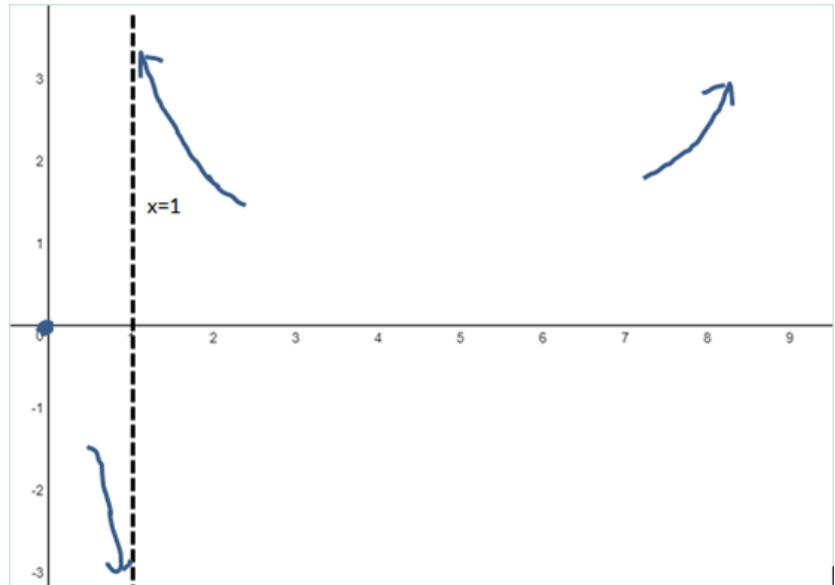
此外，还可以知道 $f(0) = 0$

2. 标出无限远端

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = \frac{0^+}{\ln 0^+} = \frac{0^+}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x} \right) = +\infty$$

由于 x 的定义域是 $(0, +\infty)$ 且 $x \neq 1$ ，所以 x 只能从正向趋近于 0；由于 $\ln x$ 是 x 的高阶无穷小，所以第二个极限是 $+\infty$ 。目前的草图：



几乎可以断定剩余的部分的样子。

3. 找出驻点，判断函数的递增和递减

$$f'(x) = \frac{x' \ln x - x(\ln x)'}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - x(1/x)}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$$

$f'(x) = 0$ ，则 $x = e$ ， $f(e) = e/\ln e = e$ ，仅有一个驻点

$f'(x) < 0$ ， $0 < x < 1$ ， $1 < x < e$ ，函数递减；

$f'(x) > 0$ ， $e < x$ ，函数递增

代入一些简单值作为修饰后就可以作图了，可以省略求二阶导数，图像不会差太多。本例还是继续计算二阶导数。

4. 观察二阶导数 f'' 的正负性，以便判断 $f(x)$ 的凹凸

$$f''(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2} \right)' = \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{(\ln x)^2} \right)' = \frac{-(\ln x)^{-2}}{x} + \frac{2(\ln x)^{-3}}{x} = \frac{2 - \ln x}{x(\ln x)^3}$$

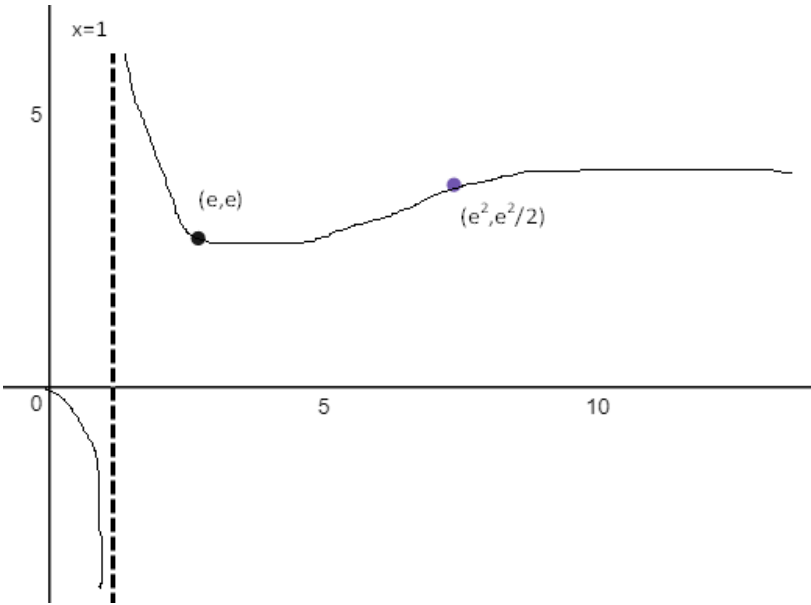
$f''(x) < 0$ ， $0 < x < 1$ ，函数是凹的

$f''(x) > 0$ ， $1 < x < e^2$ ，函数是凸的

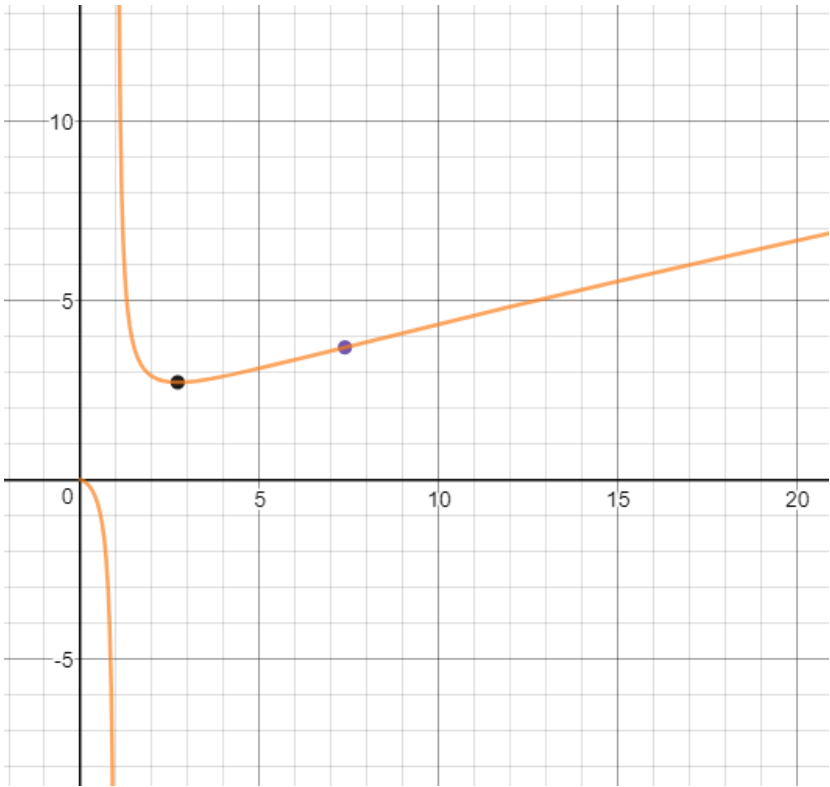
$f''(x) < 0, e^2 < x$, 函数是凹的

$f'(x) = 0, x = e^2$, 拐点是 e^2

至此，可以构图了：



构图结果



真实图像

总结

1. 若在 (a,b) 内 $f''(x) < 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凹的， f' 递减
2. 若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上的图形是凸的， f' 递增
3. 极值点，经过极值点后 $f'(x)$ 的符号改变
4. 驻点 $f'(x_0)=0$ ， x_0 是驻点， $f(x_0)$ 是驻点值
5. 拐点，经过拐点后，函数的凹凸性发生改变
6. 利用构图的一般步骤为双曲线构图

出处: 微信公众号 "我是8位的"

本文以学习、研究和分享为主, 如需转载, 请联系本人, 标明作者和出处, 非商业用途!

扫描二维码关注作者公众号 "我是8位的"



随笔

分类: [单变量微积分](#)

标签: [拐点](#), [驻点](#), [极值点](#), [函数的凹凸性](#)

[好文要顶](#)[关注我](#)[收藏该文](#)



我是8位的

关注 - 5

粉丝 - 288

+加关注

0

0

 推荐

 反对

« 上一篇: [软件的社交能力](#)
» 下一篇: [单变量微积分笔记8——最值问题和相关变率](#)

posted on 2017-09-19 22:55 我是8位的 阅读(2591) 评论(0) 编辑 收藏 举报

[刷新评论](#) [刷新页面](#) [返回顶部](#)

 登录后才能查看或发表评论, 立即 [登录](#) 或者 [逛逛](#) [博客园首页](#)

【推荐】华为 HWD 2022 故事征集, 分享最打动你的科技女性故事
【推荐】华为开发者专区, 与开发者一起构建万物互联的智能世界

广告 X

JAVA Office文档在线编辑APIs

简单易用的Word, Excel, PowerPoint在线编辑接口

cloud.e-iceblue.cn

打开

编辑推荐:

- 革命性创新, 动画杀手铜 @scroll-timeline
- 戏说领域驱动设计 (十二) —— 服务
- ASP.NET Core 6框架揭秘实例演示[16]: 内存缓存与分布式缓存的使用

- .Net Core 中无处不在的 Async/Await 是如何提升性能的?
- 分布式系统改造方案 —— 老旧系统改造篇



最新新闻:

- 乔布斯的创业搭档: 他缺乏工程师才能, 不得不锻炼营销能力来弥补
 - 美国大厂码农薪资曝光: 年薪18万美元, 够养家, 不够买海景房
 - 两张照片就能转视频! Google提出FLIM帧插值模型
 - Android 再推 “杀手级” 功能, 可回收 60% 存储空间
 - 溺在理财暴雷潮的投资人: 本金63万, 月兑25元不够卖菜
- » 更多新闻...

Powered by:
博客园

Copyright © 2022 我是8位的
Powered by .NET 6 on Kubernetes